J.R. Reitz, F.J. Milford και R.W. Christy
Τα Θεμέλια της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ. Αθήνα, 2003

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διανυσματική Ανάλυση

Η χρήση της διανυσματικής ανάλυσης μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά το συμβολισμό στη μελέτη του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού. Αλλά πέρα από αυτή την απλοποίηση, η διανυσματική ανάλυση φέρνει στο φως και το φυσικό νόημα των εξισώσεων. Το κεφάλαιο αυτό έχει σκοπό να παρουσιάσει μια σύντομη αλλά και πλήρη ανάπτυξη των βασικών στοιχείων της διανυσματικής ανάλυσης και να προσφέρει μια πρακτική γνώση του θέματος, που είναι απαραίτητη για τη μελέτη του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού. Για τους αναγνώστες που είναι ήδη εξοικειωμένοι με τη διανυσματική ανάλυση, το κεφάλαιο αυτό θα αποτελέσει μια χρήσιμη επανάληψη καθώς και μια εισαγωγή στο συμβολισμό που ακολουθείται στο βιβλίο.

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Στη μελέτη της βασικής Φυσικής συναντούμε μεγέθη διαφόρων ειδών. Συγκεκριμένα, διακρίνουμε τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανυσματικά μεγέθη. Για τις δικές μας ανάγκες, αρκεί να ορίσουμε το βαθμωτό μέγεθος ως εξής:

Βαθμωτό ονομάζεται το μέγεθος που χαρακτηρίζεται πλήρως από το μέτρο του.

Παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών είναι: η μάζα, ο χρόνος, ο όγκος κ.λπ. Μια απλή επέκταση της έννοιας του βαθμωτού μεγέθους είναι το *βαθμωτό πεδίο* –μια συνάρτηση της θέσης που είναι πλήρως καθορισμένη από το μέτρο της σε όλα τα σημεία του χώρου.

Το διάνυσμα μπορεί να οριστεί ως εξής:

Διάνυσμα ονομάζεται το μέγεθος που χαρακτηρίζεται πλήρως από το μέτρο του και την κατεύθυνσή του.

Ως παραδείγματα διανυσμάτων αναφέρουμε τη θέση ενός σημείου ως προς μια καθορισμένη αρχή, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, τη δύναμη κ.λπ. Το *διανυσματικό πεδίο*, που αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας του διανύσματος, ορίζει μια συνάρτηση της θέσης που καθορίζεται πλήρως από το μέτρο της και την κατεύθυνσή της σε κάθε σημείο του χώρου.

Αυτοί οι ορισμοί μπορούν να εκλεπτυνθούν και να επεκταθούν. Πράγματι, στο Παράρτημα Β′, με τη χρήση μετασχηματισμών, αντικαθίστανται από περισσότερο περίπλοκους ορισμούς. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε πιο πολύπλοκα μεγέθη, όπως για παράδειγμα τους τανυστές. Ωστόσο, τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μεγέθη είναι, κατά μεγάλο ποσοστό, τα μόνα που θα χρειαστούμε ως το Κεφάλαιο 22.

1.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εφόσον η άλγεβρα των βαθμωτών είναι γνωστή στον αναγνώστη, θα χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη της διανυσματικής άλγεβρας. Για να προχωρήσουμε σ' αυτή την ανάπτυξη, είναι χρήσιμο να ορίσουμε μια αναπαράσταση των διανυσμάτων μας. Γι' αυτό το σκοπό εισάγουμε το καρτεσιανό τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Θα το συμβολίζουμε με τις τρεις μεταβλητές x, y, z, ή, όπου διευκολύνει περισσότερο, με τις x_1, x_2, x_3. Ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, ένα διάνυσμα καθορίζεται από τις x-, y- και z-συνιστώσες του. Επομένως, ένα διάνυσμα[1] $\mathbf{V}$ καθορίζεται από τις συνιστώσες του V_x, V_y, V_z, όπου $V_x = |\mathbf{V}|\cos\alpha_1$, $V_y = |\mathbf{V}|\cos\alpha_2$, $V_z = |\mathbf{V}|\cos\alpha_3$, και οι γωνίες α είναι αυτές που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{V}$ με τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων. Το βαθμωτό $|\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ είναι το *μέτρο* του διανύσματος $\mathbf{V}$ ή το *μήκος* του. Στην περίπτωση διανυσματικών πεδίων, κάθε συνιστώσα είναι μια συνάρτηση των x, y και z. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι η εισαγωγή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων έγινε για απλοποίηση και καλύτερη κατανόηση. Όλοι οι ορισμοί και οι εφαρμογές είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων ορίζεται ως το διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι το άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των αρχικών διανυσμάτων. Επομένως, αν $\mathbf{C}$ είναι το άθροισμα των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, γράφουμε:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.1}$$

και

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \tag{1.2}$$

Αυτός ο ορισμός του αθροίσματος διανυσμάτων είναι ισοδύναμος με τον γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων.

Η αφαίρεση διανυσμάτων ορίζεται με τη βοήθεια του αντίθετου διανύσματος, του οποίου οι συνιστώσες είναι οι αντίθετες του αντίστοιχου αρχικού

[1] Οι διανυσματικές ποσότητες θα συμβολίζονται με έντονα γράμματα.

διανύσματος. Έτσι, αν το $\mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα, το $-\mathbf{A}$ ορίζεται από τις σχέσεις:

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x, \quad (-\mathbf{A})_y = -A_y, \quad (-\mathbf{A})_z = -A_z \tag{1.3}$$

Η πράξη της αφαίρεσης ορίζεται τότε μέσω της άθροισης του αντίθετου διανύσματος και γράφεται:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{1.4}$$

Εφόσον η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι προσεταιριστική και μεταθετική, έπεται ότι η πρόσθεση (και η αφαίρεση) διανυσμάτων είναι και αυτή προσεταιριστική και μεταθετική. Σε διανυσματική μορφή αυτό εμφανίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Με άλλα λόγια, οι παρενθέσεις δεν είναι αναγκαίες, όπως φαίνεται και από την τελευταία σχέση.

Προχωρώντας τώρα στην πράξη του πολλαπλασιασμού, παρατηρούμε ότι το απλούστερο γινόμενο είναι της μορφής: βαθμωτό επί διάνυσμα. Αυτή η διαδικασία δίνει ένα διάνυσμα, του οποίου οι συνιστώσες είναι το γινόμενο του βαθμωτού επί την αντίστοιχη συνιστώσα του αρχικού διανύσματος. Αν το c είναι βαθμωτό μέγεθος και το $\mathbf{A}$ διάνυσμα, το $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ ορίζεται ως:

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z \tag{1.6}$$

Είναι φανερό ότι αν το $\mathbf{A}$ είναι ένα *διανυσματικό πεδίο* και το c είναι ένα *βαθμωτό πεδίο*, το $\mathbf{B}$ είναι ένα νέο διανυσματικό πεδίο, *όχι* υποχρεωτικά σταθερό πολλαπλάσιο του $\mathbf{A}$.

Στην περίπτωση πολλαπλασιασμού δύο διανυσμάτων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, γνωστές ως διανυσματικό και βαθμωτό γινόμενο. Το βαθμωτό γινόμενο –όπου το όνομά του υποδεικνύει και το είδος του γινομένου– ονομάζεται επίσης και *εσωτερικό γινόμενο*. Ο ορισμός του βαθμωτού γινομένου, το οποίο γράφεται ως $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, είναι:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.7}$$

Αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ίσως πιο γνωστό ορισμό, δηλαδή: το βαθμωτό γινόμενο ισούται με το γινόμενο των μέτρων των δύο αρχικών διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα. Αν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Το βαθμωτό γινόμενο είναι μεταθετικό. Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{A}$ γράφεται ως:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

Το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα, όπως δηλώνει και η ονομασία του. Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε και τον όρο *εξωτερικό γινόμενο*. Το διανυσματικό γινόμενο γράφεται ως $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Αν το διάνυσμα $\mathbf{C}$ είναι το διανυσματικό γινόμενο των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, τότε $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, όπου:

$$\begin{aligned} &C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z \\ &C_z = A_x B_y - A_y B_x \end{aligned} \tag{1.8}$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι το διανυσματικό γινόμενο εξαρτάται από τη σειρά των παραγόντων του γινομένου. Η εναλλαγή της σειράς εισάγει ένα μείον:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Επομένως:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

Αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο: το διανυσματικό γινόμενο είναι διάνυσμα με μέτρο το γινόμενο των μέτρων των δύο αρχικών διανυσμάτων επί το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν, η δε κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα της δεξιόστροφης βίδας (κοχλία)[2].

Το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να απομνημονευθεί εύκολα με τη βοήθεια μιας ορίζουσας. Αν $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι μοναδιαία διανύσματα –δηλαδή διανύσματα με μοναδιαίο μέτρο στις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα– τότε:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

Αν η παραπάνω ορίζουσα αναπτυχθεί με τους γνωστούς κανόνες, το αποτέλεσμα είναι ακριβώς ο ορισμός που δώσαμε για το διανυσματικό γινόμενο.

Οι παραπάνω αλγεβρικές πράξεις μπορούν να συνδυαστούν με διάφορους τρόπους. Τα αποτελέσματα αυτών των συνδυασμών, τις πιο πολλές φορές, είναι προφανή. Αλλά υπάρχουν δύο σημαντικά τριπλά γινόμενα, τα οποία αξίζει να αναφέρουμε. Το τριπλό βαθμωτό γινόμενο $D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι δίνεται από την ορίζουσα:

$$D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{1.10}$$

Το γινόμενο αυτό παραμένει το ίδιο σε εναλλαγή βαθμωτού-διανυσματικού γινομένου καθώς και σε κάθε κυκλική μετάθεση των τριών διανυσμάτων. Σημειώστε ότι οι παρενθέσεις δεν είναι αναγκαίες, εφόσον το διανυσματικό γινόμενο μεταξύ βαθμωτού και διανύσματος δεν ορίζεται.

[2] Ας περιστρέψουμε το $\mathbf{A}$ προς το $\mathbf{B}$ κατά τη μικρότερη γωνία. Μια δεξιόστροφη βίδα που περιστρέφεται κατ' αυτόν τον τρόπο θα προχωρήσει σε μια κατεύθυνση κάθετη στα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Αυτή η κατεύθυνση καθορίζει την αντίστοιχη του διανύσματος $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Το άλλο ενδιαφέρον τριπλό γινόμενο είναι το τριπλό διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Με συνεχή εφαρμογή του ορισμού του διανυσματικού γινομένου, Εξ.(1.8), βρίσκουμε:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{1.11}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παρενθέσεις στο διανυσματικό γινόμενο είναι αναγκαίες. Αν έλειπαν, το γινόμενο δεν θα ήταν πλήρως καθορισμένο.

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί για τη δυνατότητα διαίρεσης διανυσμάτων. Η διαίρεση διανύσματος δια βαθμωτό ορίζεται βέβαια ως το γινόμενο του διανύσματος επί το αντίστροφο του βαθμωτού μεγέθους. Η διαίρεση όμως διανύσματος δια διάνυσμα ορίζεται μόνο αν τα διανύσματα είναι παράλληλα. Από την άλλη, μπορούμε να ορίσουμε γενικές λύσεις διανυσματικών εξισώσεων και μ' αυτόν τον τρόπο να επιτύχουμε κάποια πράξη που μοιάζει με τη διαίρεση. Θεωρήστε την εξίσωση:

$$c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \tag{1.12}$$

όπου c γνωστό βαθμωτό μέγεθος, $\mathbf{A}$ γνωστό διάνυσμα και $\mathbf{X}$ άγνωστο διάνυσμα. Μια γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\mathbf{X} = \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{B} \tag{1.13}$$

όπου $\mathbf{B}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα κάθετο στο $\mathbf{A}$, δηλαδή τέτοιο ώστε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Αυτό που πετύχαμε είναι να διαιρέσουμε το c δια του $\mathbf{A}$, ή καλύτερα βρήκαμε τη γενική μορφή του διανύσματος $\mathbf{X}$ που ικανοποιεί την Εξ.(1.12). Δεν υπάρχει μοναδική λύση, και αυτό ακριβώς δείχνει το διάνυσμα $\mathbf{B}$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{X} \tag{1.14}$$

όπου $\mathbf{A}$ και $\mathbf{C}$ γνωστά διανύσματα και $\mathbf{X}$ άγνωστο διάνυσμα. Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + k\mathbf{A} \tag{1.15}$$

όπου k είναι τυχαίο βαθμωτό μέγεθος. Επομένως, το $\mathbf{X}$ στην Εξ.(1.15) μοιάζει πολύ με τη διαίρεση $\mathbf{C}$ δια $\mathbf{A}$. Το βαθμωτό k δείχνει ακριβώς ότι δεν έχουμε μία μοναδική λύση της Εξ.(1.14). Αν απαιτήσουμε το $\mathbf{X}$ να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις Εξ.(1.12) και (1.14), τότε η λύση είναι μοναδική (αν υπάρχει) και δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \tag{1.16}$$

1.3 ΒΑΘΜΙΔΑ

Θα επεκτείνουμε τώρα τις ιδέες που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα στο διανυσματικό λογισμό, δηλαδή θα αναφερθούμε στην παραγώγιση και την ολοκλήρωση. Η απλούστερη σχέση είναι αυτή μεταξύ ενός διανυσματικού πεδίου και των παραγώγων ενός βαθμωτού πεδίου. Θα ήταν χρήσιμο πρώτα να εισαγάγουμε την έννοια της *κατευθυνόμενης παραγώγου* μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, η οποία είναι απλώς ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Η κατευθυνόμενη παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης συμβολίζεται συνήθως ως $d\varphi/ds$. Θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι το $\mathbf{ds}$ περιγράφει τη στοιχειώδη μετατόπιση στη δεδομένη κατεύθυνση, και ότι ds είναι το μέτρο του $\mathbf{ds}$. Αν το $\mathbf{ds}$ έχει συνιστώσες dx, dy, dz, τότε:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}{\Delta s}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου, ας θεωρήσουμε μια βαθμωτή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Έτσι, η $\varphi(x,y)$ περιγράφει ένα βαθμωτό πεδίο δύο διαστάσεων. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το φ ως συνάρτηση των x και y, όπως κάνουμε στο Σχ.(1.1) για τη συνάρτηση $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος στο σημείο (x_0, y_0) εξαρτάται από την κατεύθυνση. Αν επιλέξουμε την κατεύθυνση που καθορίζεται από τη σχέση $dy/dx = -x_0/y_0$, βρίσκουμε:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0\frac{x_0}{y_0}\right]\frac{dx}{ds} = 0 \qquad (1.17)$$

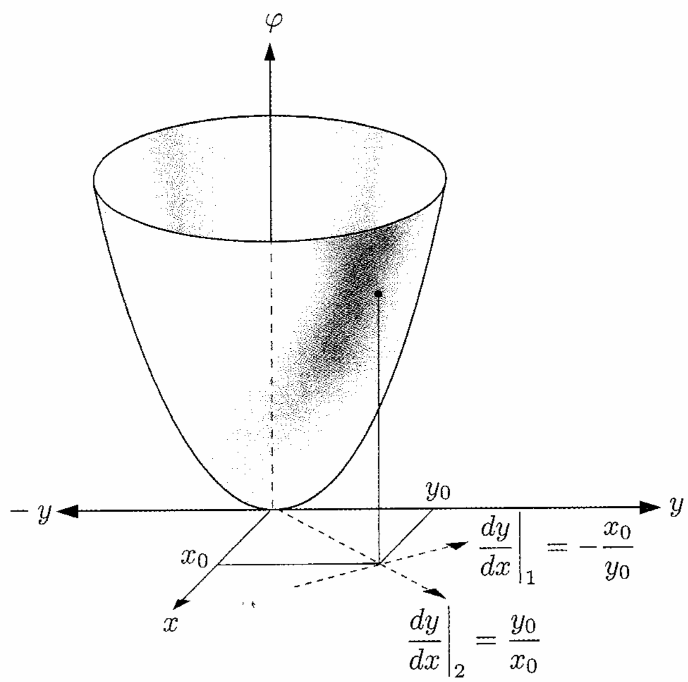
Αν επιλέξουμε την κατεύθυνση $dy/dx = y_0/x_0$, βρίσκουμε:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = \left(2x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2+y_0^2} \qquad (1.18)$$

εφόσον $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Ως μια τρίτη περίπτωση, επιλέξτε $dy/dx = \alpha$. Τότε:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1+\alpha^2)^{-1/2} \qquad (1.19)$$

Αν αυτό το αποτέλεσμα το παραγωγήσουμε ως προς α και απαιτήσουμε η παράγωγος να είναι μηδέν, βρίσκουμε την τιμή του α για την οποία η παράγωγος είναι μέγιστη ή ελάχιστη. Η τιμή αυτή είναι $\alpha = y_0/x_0$, η οποία μας δείχνει απλώς ότι η κατεύθυνση της μέγιστης μεταβολής της συνάρτησης $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ είναι η ακτινική. Αν η κατεύθυνση είναι ακτινική «προς τα έξω» (μακριά από την αρχή των αξόνων) τότε το μέγιστο αναφέρεται στο μέγιστο ρυθμό αύξησης. Αν είναι ακτινική «προς τα μέσα», το μέγιστο αναφέρεται

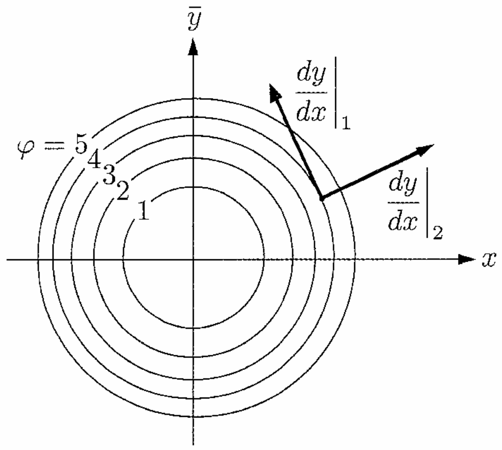


Σχήμα 1.1: *Η συνάρτηση $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ ως συνάρτηση των x και y σε τρισδιάστατο γράφημα*

στο μέγιστο ρυθμό μείωσης ή στον ελάχιστο ρυθμό αύξησης. Στην κατεύθυνση που καθορίζεται από τη σχέση $dy/dx = -x_0/y_0$, ο ρυθμός μεταβολής της $x^2 + y^2$ είναι μηδέν. Αυτή η κατεύθυνση είναι εφαπτομενική στον κύκλο $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Είναι φανερό ότι σ' αυτή την καμπύλη, η $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ δεν μεταβάλλεται. Η κατεύθυνση μηδενισμού του $d\varphi/ds$ δίνει την κατεύθυνση της καμπύλης φ = *σταθερό* που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο. Αυτές οι καμπύλες, που για τη συνάρτηση $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ είναι κύκλοι, είναι ακριβώς ανάλογες με τις ισοϋψείς καμπύλες των τοπογραφικών χαρτών. Στο Σχ.(1.2) παρουσιάζεται η συνάρτηση $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ σχεδιασμένη με τη μορφή ισοϋψών.

Η ιδέα των ισοϋψών μπορεί να γενικευθεί σε συναρτήσεις τριών μεταβλητών, οπότε οι επιφάνειες $\varphi(x, y, z)$ = *σταθερό* ονομάζονται *ισοδυναμικές επιφάνειες*. Το ανάλογο του Σχ.(1.2) στις τρεις διαστάσεις είναι ο μόνος πρακτικός τρόπος περιγραφής ενός βαθμωτού πεδίου στον τρισδιάστατο χώρο. Η βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης μπορεί να οριστεί τώρα ως εξής:

Βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης φ είναι ένα διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι η μέγιστη κατευθυνόμενη παράγωγος στο



Σχήμα 1.2: *Η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ με τη μορφή ισοϋψών σε δύο διαστάσεις*

συγκεκριμένο σημείο, η δε κατεύθυνση είναι αυτή η οποία μεγιστοποιεί την κατευθυνόμενη παράγωγο στο σημείο αυτό.

Είναι φανερό ότι η βαθμίδα έχει διεύθυνση κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες της φ στο σημείο που θεωρούμε. Τα συνηθέστερα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι τα[3] $\boldsymbol{\nabla}$ και **grad**. Με τη χρήση της βαθμίδας, η κατευθυνόμενη παράγωγος γράφεται ως:

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathbf{grad}\,\varphi| \cos\theta \tag{1.20}$$

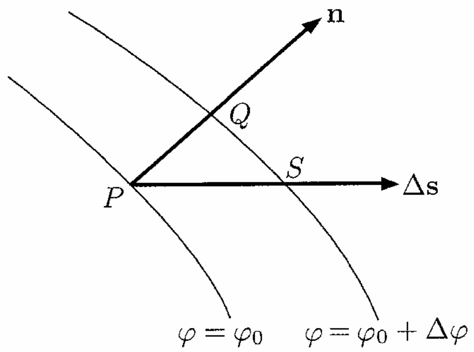
όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης του $d\mathbf{s}$ και της κατεύθυνσης της βαθμίδας. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται πολύ εύκολα από τη γεωμετρία του Σχ.(1.3). Αν $d\mathbf{s}$ είναι η διανυσματική μετατόπιση με μέτρο ds, η Εξ.(1.20) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{grad}\,\varphi \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} \tag{1.21}$$

Αυτή η εξίσωση μας επιτρέπει να βρούμε την αναλυτική μορφή της βαθμίδας σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων για το οποίο γνωρίζουμε τη μορφή του $d\mathbf{s}$. Στο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων, γνωρίζουμε ότι $d\mathbf{s} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$. Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz$$

[3] Στην αρχή θα χρησιμοποιούμε το δεύτερο σύμβολο.



Σχήμα 1.3: *Τμήματα δύο ισοδυναμικών επιφανειών της συνάρτησης* $\varphi(x, y, z)$. *Το* $|\mathbf{grad}\,\varphi|$ *στο σημείο* P *είναι ίσο με το όριο του* $\Delta\varphi/\overline{PQ}$, *καθώς το* $\overline{PQ} \to 0$, *και το* $d\varphi/ds$ *είναι το αντίστοιχο όριο του* $\Delta\varphi/\overline{PS}$.

Από αυτή την εξίσωση και την Εξ.(1.21) έπεται ότι:

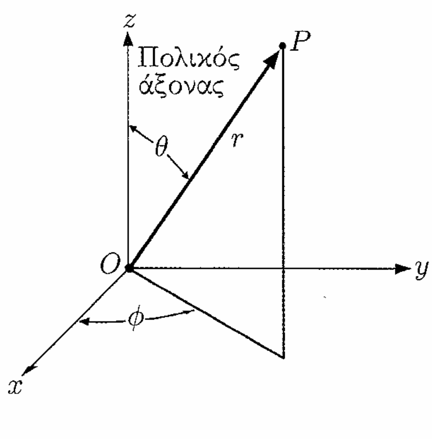
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = (\mathbf{grad}\,\varphi)_x dx + (\mathbf{grad}\,\varphi)_y dy + (\mathbf{grad}\,\varphi)_z dz$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των διαφορικών των ανεξάρτητων μεταβλητών και στα δύο μέλη της εξίσωσης, παίρνουμε:

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.22}$$

στις ορθογώνιες συντεταγμένες. Στα άλλα συστήματα, η διαδικασία παραμένει η ίδια. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, με τα r, θ, ϕ όπως ορίζονται στο Σχ.(1.4), έχουμε:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\,d\phi \tag{1.23}$$



Σχήμα 1.4: *Ορισμός των σφαιρικών συντεταγμένων* r, θ *και* ϕ

και

$$ds = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin\theta d\phi \tag{1.24}$$

όπου $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ και $\mathbf{a}_\phi$ είναι μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις r, θ, και ϕ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την Εξ.(1.21) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών, παίρνουμε τη μορφή του **grad**:

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \tag{1.25}$$

στις σφαιρικές συντεταγμένες.

1.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Παρ' όλο που υπάρχουν και άλλα θέματα διανυσματικής παραγώγισης, είναι προτιμότερο να μελετήσουμε τώρα τη διανυσματική ολοκλήρωση. Για τους δικούς μας σκοπούς, θεωρούμε τριών ειδών ολοκληρώματα: το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, το επιφανειακό ολοκλήρωμα και το χωρικό ολοκλήρωμα, ανάλογα με το διαφορικό που εμφανίζεται. Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό πεδίο. Μερικοί απ' αυτούς τους συνδυασμούς (διαφορικό-συνάρτηση) δίνουν ολοκληρώματα που δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αυτά που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι το βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου, το βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου και τέλος το χωρικό ολοκλήρωμα βαθμωτού και διανυσματικού πεδίου.

Αν $\mathbf{F}$ είναι διανυσματικό πεδίο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ γράφεται ως:

$$\int_{a(C)}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \tag{1.26}$$

όπου C είναι η καμπύλη κατά μήκος της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση, a και b είναι το αρχικό και τελικό σημείο στην καμπύλη και $d\mathbf{l}$ είναι η στοιχειώδης διανυσματική μετατόπιση πάνω στην καμπύλη C. Εφόσον η ποσότητα $\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{l}$ είναι ένα βαθμωτό, το ίδιο ισχύει προφανώς και για το ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ακολουθεί πιστά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann. Το τμήμα της καμπύλης μεταξύ των σημείων a και b διαμερίζεται σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών τμημάτων $\Delta\mathbf{l}_i$. Για κάθε τέτοιο τμήμα, υπολογίζεται η τιμή της $\mathbf{F}$ σε κάποιο εσωτερικό σημείο του τμήματος. Σχηματίζεται το βαθμωτό γινόμενο κάθε $\Delta\mathbf{l}_i$ επί την αντίστοιχη τιμή του $\mathbf{F}$ και αθροίζονται τα αποτελέσματα. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται ως το όριο αυτού του αθροίσματος, καθώς ο αριθμός των τμημάτων της διαμέρισης τείνει στο άπειρο και το μήκος κάθε τμήματος στο μηδέν.

Αυτός ο ορισμός γράφεται:

$$\int_{a(C)}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος εξαρτάται συνήθως, όχι μόνο από τα όρια a και b, αλλά και από την ίδια τη μορφή της καμπύλης C, κατά μήκος της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση: η τιμή και η κατεύθυνση της $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ καθώς και η κατεύθυνση του $d\mathbf{l}$ σε κάθε σημείο της C εξαρτώνται από την ίδια την C και την εφαπτομένη της, αντίστοιχα, στο συγκεκριμένο σημείο. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μια κλειστή καμπύλη είναι αρκετά σημαντικό ώστε να χρησιμοποιούμε ειδικό συμβολισμό, δηλαδή:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.27}$$

Το ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής γραμμής δεν είναι συνήθως μηδέν. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων, για τα οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος *κάθε* κλειστής καμπύλης είναι μηδέν, έχει ιδιαίτερη σημασία. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, πολύ συχνά συναντούμε επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης η οποία δεν προσδιορίζεται. Για παράδειγμα:

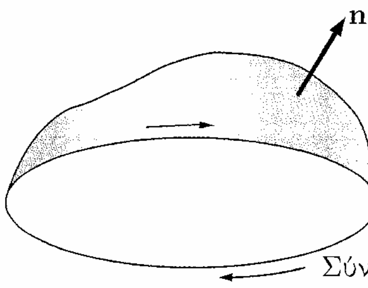
$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.28}$$

Ο συμβολισμός αυτός είναι χρήσιμος μόνο στις περιπτώσεις όπου το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη C, μέσα σε μάλλον ευρέα όρια. Αν υπάρχει η παραμικρή αμφιβολία, είναι προτιμότερο να καθορίζεται η καμπύλη. Η βασική μέθοδος υπολογισμού των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων είναι η μονοπαραμετρική περιγραφή της καμπύλης και η χρήση αυτής της περιγραφής για τη μετατροπή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε άθροισμα τριών απλών μονοδιάστατων ολοκληρωμάτων. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μέθοδος αυτή είναι βαρετή και χρονοβόρα. Ευτυχώς, πολύ σπάνια τη χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Όπως θα φανεί αργότερα, είναι συνήθως δυνατό να αποδείξουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή μεταξύ των ορίων. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορεί να επιλεγεί μια απλή διαδρομή που να απλοποιεί την ολοκλήρωση.

Αν $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ γράφεται ως:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \tag{1.29}$$

όπου S είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση, da είναι μία στοιχειώδης επιφάνεια πάνω στην S, και $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην da διάνυσμα. Υπάρχει μια απροσδιοριστία στην επιλογή του $\mathbf{n}$, η οποία αίρεται με το να θεωρήσουμε το $\mathbf{n}$ να κατευθύνεται κάθετα και προς τα έξω αν η S είναι κλειστή επιφάνεια. Αν η S είναι ανοιχτή αλλά πεπερασμένη επιφάνεια, τότε έχει σύνορο, και η φορά του κάθετου διανύσματος



Σχήμα 1.5: *Σχέση μεταξύ του κάθετου σε μια επιφάνεια διανύσματος* **n** *και της φοράς διαγραφής του συνόρου*

καθορίζεται σε σχέση με την αυθαίρετα ορισμένη θετική φορά διαγραφής αυτού του συνόρου. Όπως φαίνεται στο Σχ.(1.5), η θετική φορά του κάθετου διανύσματος είναι η φορά κατά την οποία θα προχωρήσει μια δεξιόστροφη βίδα αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά της συνοριακής καμπύλης. Πολλές φορές, το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια S συμβολίζεται ως:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

Σχόλια ανάλογα με εκείνα που αναφέρθηκαν για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα μπορούσαν να επαναληφθούν και εδώ. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα που αναφέρουμε είναι βέβαια βαθμωτό μέγεθος. Συνήθως εξαρτάται από την επιφάνεια ολοκλήρωσης S και γι' αυτό οι περιπτώσεις που είναι ανεξάρτητο είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Ο ορισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι ακριβώς ανάλογος με αυτόν του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Η ακριβής διαδικασία αφήνεται ως άσκηση.

Αν $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό και φ ένα βαθμωτό πεδίο, τότε τα δύο ολοκληρώματα όγκου που μας ενδιαφέρουν είναι:

$$J = \int_V \varphi\, dv \qquad \text{και} \qquad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F}\, dv \tag{1.30}$$

Είναι φανερό ότι το J είναι βαθμωτό και το $\mathbf{K}$ διάνυσμα. Ο ορισμός αυτών των ολοκληρωμάτων ανάγεται γρήγορα σε ολοκλήρωμα κατά Riemann στις τρεις διαστάσεις, με την εξαίρεση ότι στο $\mathbf{K}$ υπάρχει ένα ολοκλήρωμα για κάθε συνιστώσα του $\mathbf{F}$. Αυτά τα ολοκληρώματα είναι αρκετά γνωστά ώστε να μη χρειάζονται περαιτέρω σχόλια.

1.5 ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Ένας άλλος σπουδαίος τελεστής, ο οποίος ουσιαστικά είναι μια παράγωγος, είναι η απόκλιση. Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$, που γράφεται ως

div F, ορίζεται ως εξής:

Απόκλιση διανυσματικού πεδίου είναι το όριο του κλειστού επιφανειακού ολοκληρώματος του πεδίου ανά μονάδα όγκου, καθώς ο όγκος που περικλείει η κλειστή επιφάνεια τείνει στο μηδέν. Δηλαδή:

$$\mathbf{div\,F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

Η απόκλιση είναι σαφώς μια βαθμωτή συνάρτηση (βαθμωτό πεδίο) και ορίζεται στο όριο της επιφάνειας ολοκλήρωσης. Αυτός ο ορισμός έχει αρκετά πλεονεκτήματα: είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της συγκεκριμένης μορφής που παίρνει ο τελεστής της απόκλισης σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα.

Στο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων, ο στοιχειώδης όγκος $\Delta x\Delta y\Delta z$ προσφέρει μια κατάλληλη βάση για την εύρεση της απόκλισης. Αν η μια κορυφή του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι στο σημείο x_0, y_0, z_0, τότε:

$$\begin{aligned}
F_x(x_0+\Delta x, y, z) &= F_x(x_0, y, z) + \Delta x\,\frac{\partial F_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y,z}\\
F_y(x, y_0+\Delta y, z) &= F_y(x, y_0, z) + \Delta y\,\frac{\partial F_y}{\partial y}\bigg|_{x,y_0,z}\\
F_z(x, y, z_0+\Delta z) &= F_z(x, y, z_0) + \Delta z\,\frac{\partial F_z}{\partial z}\bigg|_{x,y,z_0}
\end{aligned}\tag{1.31}$$

όπου οι όροι ανώτερης τάξης σε Δx, Δy και Δz παραλείπονται. Εφόσον η στοιχειώδης επιφάνεια $\Delta y\Delta z$ είναι κάθετη στον άξονα x, η $\Delta z\Delta x$ είναι κάθετη στον άξονα y και η $\Delta x\Delta y$ είναι κάθετη στον άξονα z, ο ορισμός της απόκλισης γίνεται:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div\,F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\bigg\{&\int F_x(x_0, y, x)dy\,dz\\
&+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z)dx\,dz\\
&+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0)dx\,dy\\
&+\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z} - \int F_x(x_0, y, z)dy\,dz\\
&-\int F_y(x, y_0, z)dx\,dz - \int F_z(x, y, z_0)dx\,dy\bigg\}
\end{aligned}\tag{1.32}$$

Το αρνητικό πρόσημο που παρουσιάζεται στους τρεις τελευταίους όρους οφείλεται στο γεγονός ότι η φορά του προς τα έξω κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος είναι, στις περιπτώσεις αυτές, κατά τη φορά των αρνητικών ημιαξόνων.

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, και η απόκλιση σε ορθογώνιες συντεταγμένες παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.33}$$

Στις σφαιρικές συντεταγμένες, η διαδικασία είναι ανάλογη. Ο όγκος που περικλείεται από τις μεταβολές των συντεταγμένων κατά Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ χρησιμοποιείται εδώ ως όγκος ολοκλήρωσης. Αυτός ακριβώς ο στοιχειώδης όγκος είναι $r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\theta \Delta\phi$. Επειδή ο όγκος εξαρτάται από την τιμή των μεταβλητών (πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στις καρτεσιανές συντεταγμένες), είναι προτιμότερο να γράψουμε το $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta a$ σε πλήρη μορφή:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta a &= F_r r^2 \sin\theta \Delta\theta\Delta\phi \\ &\quad + F_\theta r \sin\theta \Delta\phi \Delta r + F_\phi r \Delta r \Delta\theta\end{aligned} \tag{1.34}$$

Από την παραπάνω μορφή, είναι φανερό ότι μάλλον το $F_r r^2 \sin\theta$, και όχι το F_r, πρέπει να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Ομοίως και στους άλλους όρους, θα πρέπει να αναπτυχθούν οι συντελεστές των γινομένων των στοιχειωδών μεταβολών. Πραγματοποιώντας αυτά τα αναπτύγματα, τα χρησιμοποιούμε στον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που εμφανίζεται στον ορισμό της απόκλισης, και τελικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} &\frac{1}{r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\theta \Delta\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2 \sin\theta) \Delta r \Delta\theta \Delta\phi \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r \sin\theta)\Delta r \Delta\theta\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi r)\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \right\}\end{aligned} \tag{1.35}$$

Θεωρώντας το όριο, η αναλυτική μορφή της απόκλισης σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \tag{1.36}$$

Αυτή η μέθοδος εύρεσης της αναλυτικής μορφής της απόκλισης εφαρμόζεται για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, εφόσον είναι γνωστές οι μορφές του στοιχειώδους όγκου και της στοιχειώδους επιφάνειας ή, ανάλογα, οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις.

Η φυσική σημασία της απόκλισης φαίνεται αμέσως από ένα παράδειγμα, το οποίο δανειζόμαστε από τη μηχανική των ρευστών. Αν $\mathbf{V}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, ως συνάρτηση της θέσης, και ρ η πυκνότητά του, τότε η συνολική ποσότητα του ρευστού ανά μονάδου χρόνου, η οποία εγκαταλείπει τον όγκο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια S, είναι $\oint_S \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,da$. Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, το επιφανειακό ολοκλήρωμα αναφέρεται στη συνολική πηγή του ρευστού που περικλείει η επιφάνεια. Ο παραπάνω λοιπόν ορισμός της απόκλισης υποδεικνύει ότι αυτή μπορεί να ερμηνευθεί εκ νέου ως το όριο της έντασης της πηγής ανά μονάδα όγκου ή ως η πυκνότητα της πηγής ενός ασυμπίεστου ρευστού.

Θα αναφέρουμε και θα αποδείξουμε, στο σημείο αυτό, ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, που αναφέρεται στην απόκλιση.

Θεώρημα της απόκλισης. Το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης πάνω στην επιφάνεια S είναι ίσο με το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης της συνάρτησης πάνω στον όγκο V που περικλείει η κλειστή επιφάνεια S.

$$\int_V \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dv = \oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

Θεωρήστε ότι ο όγκος διαμερίζεται σε ένα μεγάλο αριθμό από μικρές κυψελίδες. Έστω ότι η i κυψελίδα έχει όγκο ΔV_i και περικλείεται από την επιφάνεια S_i. Είναι φανερό ότι:

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \tag{1.37}$$

όπου σε καθένα από τα ολοκληρώματα του αριστερού μέλους της εξίσωσης, το διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό του αντίστοιχου όγκου που περικλείει η S_i. Εφόσον η εξωτερική κατεύθυνση σε μία κυψελίδα είναι η εσωτερική κατεύθυνση στην κατάλληλη γειτονική κυψελίδα, όλες οι συνεισφορές στο αριστερό μέλος της Εξ.(1.37) αλληλοαναιρούνται, εκτός από αυτές που περιέχουν τμήματα της επιφάνειας S. Έτσι αποδείχθηκε η Εξ.(1.37). Το θεώρημα της απόκλισης προκύπτει αν αφήσουμε τον αριθμό των κυψελίδων να τείνει στο άπειρο με τέτοιο τρόπο ώστε ο όγκος κάθε κυψελίδας να τείνει στο μηδέν:

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \lim_{\Delta V_i\to 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \right\} \Delta V_i \tag{1.38}$$

Στο όριο, το άθροισμα πάνω στα i γίνεται ολοκλήρωμα στον όγκο V και ο λόγος του ολοκληρώματος πάνω στις S_i δια των ΔV_i γίνεται η απόκλιση του $\mathbf{F}$. Επομένως:

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_V \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dv \tag{1.39}$$

που είναι ακριβώς το θεώρημα της απόκλισης. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το θεώρημα αυτό, στην ανάπτυξη θεωρητικών ζητημάτων του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού αλλά και στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

1.6 ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

Ο τρίτος ενδιαφέρων διαφορικός τελεστής είναι ο στροβιλισμός. Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$, ο οποίος συμβολίζεται με $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$, ορίζεται ως εξής:

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ είναι το όριο του λόγου του κλειστού επιφανειακού ολοκληρώματος –πάνω στην επιφάνεια S– του εξωτερικού γινομένου του $\mathbf{F}$ επί το προς τα έξω κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$, προς τον όγκο V, που περικλείεται από την επιφάνεια, καθώς ο όγκος τείνει στο μηδέν. Δηλαδή:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, da \tag{1.40}$$

Η αναλογία μεταξύ αυτού του ορισμού και του αντίστοιχου της απόκλισης είναι εμφανής. Στη θέση του βαθμωτού γινομένου του διανυσματικού πεδίου επί το κάθετο προς την επιφάνεια διάνυσμα, έχουμε εδώ το διανυσματικό γινόμενο. Κατά τα άλλα, οι ορισμοί είναι ίδιοι. Ένας διαφορετικός αλλά ισοδύναμος και πιο χρήσιμος ορισμός είναι ο εξής:

Η συνιστώσα του $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι το όριο του κλειστού επικαμπύλιου ολοκληρώματος του πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας, καθώς η επιφάνεια που περικλείει η κλειστή καμπύλη τείνει στο μηδέν. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{a}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια αυτή. Δηλαδή:

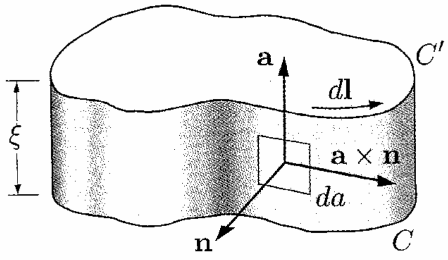
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \tag{1.41}$$

όπου η καμπύλη C, που οριοθετεί την επιφάνεια S, ανήκει σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{a}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς την αναλογία των δύο ορισμών θεωρώντας μια επίπεδη καμπύλη C και τον αντίστοιχο όγκο που παράγεται όταν η καμπύλη μετακινηθεί κατά ξ σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδό της, όπως φαίνεται στο Σχ.(1.6). Αν το $\mathbf{a}$ είναι κάθετο στο επίπεδο της καμπύλης και θεωρήσουμε το βαθμωτό γινόμενο του $\mathbf{a}$ με τον πρώτο ορισμό του $\mathbf{curl}$, η Εξ.(1.40) γίνεται:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \times \mathbf{F}\, da \tag{1.42}$$

Εφόσον το $\mathbf{a}$ είναι παράλληλο στην κάθετη διεύθυνση για όλη την περικλείουσα επιφάνεια, εκτός από τη λεπτή λωρίδα που περικλείουν οι καμπύλες C



Σχήμα 1.6: *Ο όγκος που παράγεται από τη μετακίνηση της επίπεδης καμπύλης C κατά τη διεύθυνση του διανύσματος* $\mathbf{a}$, *το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο της καμπύλης.*

και C', πρέπει να ληφθεί υπόψη μόνο το ολοκλήρωμα πάνω σ' αυτή την λωρίδα. Γι' αυτή ακριβώς την επιφάνεια, παρατηρούμε ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{n}\, da$ είναι απλώς $\xi\, d\mathbf{l}$, όπου $d\mathbf{l}$ είναι η στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος της καμπύλης C. Επιπλέον, $V = \xi S$, οπότε το όριο του ολοκληρώματος είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\xi S} \oint_C \xi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

και ο δεύτερος ορισμός εμφανίζεται μόλις απλοποιήσουμε το ξ. Η ισοδυναμία των δύο ορισμών μπορεί να αποδειχτεί επίσης χωρίς τη χρήση του συγκεκριμένου όγκου, αλλά σε βάρος της απλότητας της απόδειξης.

Η μορφή που παίρνει ο στροβιλισμός στα διάφορα συστήματα αναφοράς, μπορεί να βρεθεί με ανάλογο τρόπο όπως και στην περίπτωση της απόκλισης. Στο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων ο στοιχειώδης όγκος είναι $\Delta x \Delta y \Delta z$. Στη x συνιστώσα του στροβιλισμού συνεισφέρουν μόνο οι επιφάνειες που είναι κάθετες στους άξονες y και z. Υπενθυμίζοντας ότι $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$, οι μη μηδενικές συνεισφορές των εδρών του παραλληλεπιπέδου στη x συνιστώσα του στροβιλισμού δίνουν:

$$\begin{aligned}(\mathbf{curl}\,\mathbf{F})_x = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \{&[-F_y(x, y, z + \Delta z) + F_y(x, y, z)]\Delta x \Delta y \\ &+ [F_z(x, y + \Delta y, z) - F_z(x, y, z)]\Delta x \Delta z\}\end{aligned} \tag{1.43}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor και θεωρώντας το όριο, καταλήγουμε στην έκφραση:

$$(\mathbf{curl}\,\mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \tag{1.44}$$

για τη x συνιστώσα του στροβιλισμού. Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο βρίσκονται και οι άλλες δύο συνιστώσες:

$$(\mathbf{curl}\,\mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad (\mathbf{curl}\,\mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \tag{1.45}$$

Η μορφή του στροβιλισμού σε καρτεσιανές συντεταγμένες μπορεί εύκολα να απομνημονευτεί αν παρατηρήσουμε ότι αντιστοιχεί στην ανάπτυξη μιας 3×3 ορίζουσας, δηλαδή:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.46}$$

Η εύρεση της μορφής του στροβιλισμού στα άλλα συστήματα αναφοράς είναι ελαφρώς πιο περίπλοκη και αφήνεται ως άσκηση.

Όπως ακριβώς και στην περίπτωση της απόκλισης, συναντάμε ένα πολύ σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα, που αναφέρεται στο στροβιλισμό, γνωστό ως θεώρημα του Stokes.

Θεώρημα του Stokes. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C είναι ίσο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού του πεδίου πάνω σε οποιαδήποτε επιφάνεια που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη C. Δηλαδή:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \tag{1.47}$$

όπου S είναι μια οποιαδήποτε επιφάνεια που έχει σύνορο την κλειστή καμπύλη C.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι αντίστοιχη με αυτή του θεωρήματος της απόκλισης. Η επιφάνεια S διαμερίζεται σε ένα μεγάλο αριθμό κυψελίδων. Η επιφάνεια της i κυψελίδας είναι ΔS_i, ενώ η καμπύλη που την οριοθετεί είναι η C_i. Εφόσον όλες οι C_i πρέπει να διαγραφούν κατά την ίδια φορά, η μόνη συνεισφορά που απομένει στο άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων οφείλεται στα τμήματα των C_i, τα οποία ανήκουν στην καμπύλη C. Όλες οι άλλες συνεισφορές αλληλοαναιρούνται. Επομένως:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dl = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot dl$$

Το μόνο που απομένει τώρα είναι να θεωρήσουμε το όριο καθώς ο αριθμός των κυψελίδων απειρίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφάνεια κάθε κυψελίδας να τείνει στο μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dl = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot dl\, \Delta S_i = \int_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

που είναι ακριβώς το θεώρημα του Stokes. Το θεώρημα αυτό, όπως και το αντίστοιχο της απόκλισης, είναι χρήσιμο τόσο στην ανάπτυξη της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας όσο και στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Ίσως θα πρέπει να σημειώσουμε ότι και τα δύο αυτά θεωρήματα είναι στην ουσία μερικές ολοκληρώσεις.

1.7 Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ ∇

Εισάγουμε τώρα ένα διαφορετικό συμβολισμό για τα τρία είδη της διανυσματικής παραγώγισης με τα οποία ασχοληθήκαμε, δηλαδή τη βαθμίδα, την απόκλιση και το στροβιλισμό. Αυτός ο συμβολισμός χρησιμοποιεί το διαφορικό τελεστή *ανάδελτα*, ο οποίος σε καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζεται ως:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.48}$$

Ο ανάδελτα είναι ένας διαφορικός τελεστής, με την έννοια ότι δρα πάνω σε συναρτήσεις των (x, y, x), τις οποίες και παραγωγίζει. Είναι επίσης και διανυσματικός τελεστής, με την έννοια ότι υπακούει στους νόμους της διανυσματικής άλγεβρας[4]. Χρησιμοποιώντας τον ανάδελτα, οι Εξ.(1.22), (1.33) και (1.46) γράφονται:

grad $= \nabla$,

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.49}$$

div $= \nabla\cdot$,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.50}$$

curl $= \nabla\times$,

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.51}$$

Η χρήση του ανάδελτα είναι και αυτή ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε. Όλες οι ιδιότητες, που μπορούν να αποδειχτούν στο καρτεσιανό, ισχύουν σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα. Η μορφή του ανάδελτα στα μη καρτεσιανά (καμπυλόγραμμα) συστήματα είναι ανάλογη με την Εξ.(1.48), όπου βέβαια χρησιμοποιούμε τις κατάλληλες στοιχειώδεις μετατοπίσεις. Επίσης, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι τα μοναδιαία διανύσματα σ' αυτά τα συστήματα είναι συναρτήσεις της θέσης, και επομένως και

[4]Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Β' ο ανάδελτα υπακούει στους νόμους μετασχηματισμού των διανυσμάτων.

αυτά τα ίδια διαφορίζονται[5]. Τα σημαντικά ολοκληρωτικά θεωρήματα που αναφέρθηκαν στις Εξ.(1.21), (1.47) και (1.39), γράφονται:

$$\int_{a(C)}^{b} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{a}^{b} d\varphi = \varphi|_a^b = \varphi_b - \varphi_a \tag{1.52}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.53}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \tag{1.54}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης σε μια περιοχή n διαστάσεων, ως ολοκληρώματα της ίδιας της συνάρτησης σε μια περιοχή $n-1$ διαστάσεων, που αποτελεί το σύνορο του αρχικού n-διάστατου χώρου, όπου $n = 1, 2, 3$. Επειδή ο τελεστής ανάδελτα υπακούει στους νόμους της διανυσματικής άλγεβρας, είναι καταλληλότερος στις περιπτώσεις που εμφανίζονται διανυσματικές πράξεις, και επομένως θα εκφράζουμε τη βαθμίδα, την απόκλιση και το στροβιλισμό με αυτόν τον τελεστή. Υπενθυμίζουμε ότι ο ανάδελτα είναι *γραμμικός* τελεστής :

$$\begin{aligned}
\nabla(a\varphi + b\psi) &= a\nabla\varphi + b\nabla\psi \\
\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) &= a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G} \\
\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) &= a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}
\end{aligned}$$

όπου a και b είναι βαθμωτές σταθερές.

1.8 ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Η βαθμίδα, η απόκλιση και ο στροβιλισμός είναι τελεστές οι οποίοι μπορούν να δράσουν επαναληπτικά σε κατάλληλους συνδυασμούς πεδίων. Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την απόκλιση πάνω στη βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου. Πράγματι, αυτή η συνδυασμένη εφαρμογή είναι πολύ σημαντική ώστε έχει και δικό της όνομα: ονομάζεται *Λαπλασιανή ή τελεστής του Laplace.* Ωστόσο, δεν έχει νόημα ο στροβιλισμός της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου γιατί αυτό σημαίνει εφαρμογή του στροβιλισμού σε βαθμωτό πεδίο, πράξη που δεν ορίζεται. Συνολικά, παρουσιάζονται πέντε είδη επιτρεπτών συνδυασμών δεύτερης τάξης, και δύο από αυτούς είναι ταυτοτικά ίσοι με μηδέν. Παρ' όλα αυτά, και οι πέντε συνδυασμοί είναι σημαντικοί στη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.

Ο πρώτος συνδυασμός είναι ο *τελεστής Laplace*, ο οποίος ορίζεται ως η απόκλιση της βαθμίδας ενός βαθμωτού πεδίου και συμβολίζεται συνήθως ως ∇^2:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

[5] Στο Παράρτημα Δ΄ μπορείτε να βρείτε τη μορφή του ανάδελτα στις κυλινδρικές και σφαιρικές συνταταγμένες. Μια στοιχειώδης εισαγωγή δίνεται από τον H.T. Young, *American Journal of Physics*, τόμ. 40, σελ. 109 (1972).

Σε ορθογώνιες συντεταγμένες ισχύει:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{1.55}$$

Αυτός ο τελεστής είναι πολύ σημαντικός στην ηλεκτροστατική και θα τον χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα στο Κεφάλαιο 3.

Ο στροβιλισμός της βαθμίδας οποιουδήποτε βαθμωτού πεδίου είναι μηδέν. Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται εύκολα γράφοντάς την σε ορθογώνιες συντεταγμένες. Αν φ είναι το βαθμωτό πεδίο, τότε:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right) + \cdots = 0 \tag{1.56}$$

που αποδεικνύει ακριβώς την αρχική πρόταση. Συμβολικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} = 0$$

Η απόκλιση του στροβιλισμού οποιασδήποτε διανυσματικής συνάρτησης είναι επίσης μηδέν. Και αυτή η πρόταση αποδεικνύεται αμέσως αν χρησιμοποιήσουμε ορθογώνιες συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Οι άλλοι δύο δυνατοί τελεστές δεύτερης τάξης σχηματίζονται αν θεωρήσουμε το στροβιλισμό του στροβιλισμού ή τη βαθμίδα της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου. Η απόδειξη της παρακάτω σχέσης (σε ορθογώνιες συντεταγμένες) αφήνεται ως άσκηση:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \tag{1.58}$$

όπου η Λαπλασιανή διανυσματικού πεδίου είναι το διανυσματικό πεδίο του οποίου καθεμία από τις ορθογώνιες συνιστώσες είναι η Λαπλασιανή των αντίστοιχων ορθογώνιων συνιστωσών του αρχικού πεδίου. Για τα άλλα συστήματα συντεταγμένων, η Λαπλασιανή διανυσματικού πεδίου *ορίζεται* από την Εξ.(1.58).

Μπορούμε επίσης να δούμε τη δράση των διαφορικών τελεστών πάνω σε γινόμενα δύο πεδίων, διανυσματικών ή βαθμωτών. Οι έξι δυνατοί συνδυασμοί των διαφορικών τελεστών καθώς και η εφαρμογή τους σε γινόμενα πεδίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Οι ταυτότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν εύκολα στο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων, πράγμα το οποίο

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \tag{1.1.1}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{1.1.2}$$
$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \tag{1.1.3}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \tag{1.1.4}$$
$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi\nabla\psi \tag{1.1.5}$$
$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \tag{1.1.6}$$
$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} \tag{1.1.7}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \tag{1.1.8}$$
$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F} \tag{1.1.9}$$
$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \tag{1.1.10}$$

Πίνακας 1.1: *Διαφορικές ταυτότητες διανυσμάτων*

είναι αρκετό για να εξασφαλίσει την ισχύ τους σε κάθε σύστημα. Η εφαρμογή διαφορικού τελεστή σε γινόμενο τριών ή περισσότερων συναρτήσεων, καθώς και η εφαρμογή περισσότερων από δύο διαφορικών τελεστών, μπορεί να υπολογιστεί με επαναληπτική εφαρμογή των ταυτοτήτων του Πίνακα 1.1, ο οποίος είναι πλήρης. Οι ταυτότητες αυτές απομνημονεύονται εύκολα με τη βοήθεια των κανόνων της διανυσματικής άλγεβρας και της συνήθους παραγώγισης. Η μόνη διαφοροποίηση παρουσιάζεται στην Εξ.(1.1.6), όπου εμφανίζεται το $\mathbf{F} \cdot \nabla$ (αντί του $\nabla \cdot \mathbf{F}$).

Μερικές συγκεκριμένες συναρτήσεις εμφανίζονται συχνά στον ηλεκτρομαγνητισμό και επομένως είναι χρήσιμο να δούμε την εφαρμογή των διαφορικών τελεστών πάνω τους. Για τη συνάρτηση $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\ \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\ (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \mathbf{G} \\ \nabla^2 \mathbf{r} &= 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Αν η συνάρτηση εξαρτάται μόνο από την απόσταση $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, τότε:

$$\varphi(r) \text{ ή } \mathbf{F}(r): \quad \nabla = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d}{dr} \tag{1.60}$$

Αν η συνάρτηση εξαρτάται από το βαθμωτό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, όπου $\mathbf{A}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, τότε:

$$\varphi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \text{ ή } \mathbf{F}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}): \quad \nabla = \mathbf{A}\frac{d}{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})} \tag{1.61}$$

Αν το όρισμα της συνάρτησης είναι το $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, όπου το $\mathbf{r}'$ θεωρείται

$$\int_S \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi \, da = \oint_C \varphi \, d\mathbf{l} \tag{1.2.1}$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\varphi \, dv = \oint_S \varphi \mathbf{n} \, da \tag{1.2.2}$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \tag{1.2.3}$$

$$\int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) \, da \tag{1.2.4}$$

Πίνακας 1.2: *Θεωρήματα διανυσματικής ολοκλήρωσης*

σταθερό, τότε:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{\nabla}_R \\ \boldsymbol{\nabla}_R &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z} \end{aligned} \tag{1.62}$$

όπου $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$. Αν το $\mathbf{r}$, αντί του $\mathbf{r}'$, θεωρηθεί σταθερό, τότε:

$$\boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\nabla}' \tag{1.63}$$

όπου:

$$\boldsymbol{\nabla}' = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z'}$$

Υπάρχουν διάφορες δυνατότητες επέκτασης του θεωρήματος της απόκλησης και του θεωρήματος του Stokes. Η πιο σημαντική είναι το θεώρημα του Green, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) \, dv = \oint_S (\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot \mathbf{n} \, da \tag{1.64}$$

Το θεώρημα αυτό είναι απόρροια της εφαρμογής του θεωρήματος της απόκλισης στο διανυσματικό πεδίο:

$$\mathbf{F} = \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$, παίρνουμε:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot [\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi] \, dv = \oint_S (\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot \mathbf{n} \, da \tag{1.65}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του Πίνακα 1.1 για την απόκλιση του γινομένου ενός βαθμωτού επί ένα διανυσματικό πεδίο, παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi\boldsymbol{\nabla}\phi) - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi) = \psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi \tag{1.66}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις Εξ.(1.65) και (1.66) καταλήγουμε στο θεώρημα του Green. Στον Πίνακα 1.2 παρουσιάζονται μερικά ακόμα θεωρήματα ολοκλήρωσης διανυσματικών πεδίων.

Εδώ ολοκληρώνεται η μικρή αναφορά μας στη διανυσματική ανάλυση. Με σκοπό τη συντομία, πολλές αποδείξεις προτάσεων αφήνονται ως προβλήματα. Δεν καταβλήθηκε προσπάθεια αυστηρής περιγραφής. Η προσέγγιση στηρίχτηκε κυρίως στη χρησιμότητα: αναπτύχθηκε ό,τι θα χρειαστεί και παραλείφθηκαν όλα τα υπόλοιπα.

1.9 ΣΥΝΟΨΗ

Παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικοί τύποι διανυσματικής παραγώγισης με τη χρησιμοποίηση του **διανυσματικού διαφορικού τελεστή ανάδελτα, $\boldsymbol{\nabla}$**, δηλαδή η βαθμίδα, η απόκλιση και ο στροβιλισμός:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ο τελεστής ανάδελτα είναι γραμμικός. Ιδιότητες από την επαναληπτική εφαρμογή του ή την εφαρμογή του σε γινόμενο συναρτήσεων αποδεικνύονται στο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων αλλά ισχύουν βέβαια σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα. Οι ιδιότητες αυτές απομνημονεύονται εύκολα με τη βοήθεια των κανόνων της διανυσματικής άλγεβρας και της συνήθους παραγώγισης. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε την παραγώγιση ορισμένων ειδικών συναρτήσεων. Τα σπουδαιότερα **ολοκληρωτικά θεωρήματα**, στα οποία εμφανίζονται παράγωγοι, είναι:

$$\int_{a(C)}^{b} \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot d\mathbf{l} = \varphi|_a^b$$

$$\int_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{Θεώρημα Stokes}$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dv = \oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad \text{Θεώρημα απόκλισης}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν γενικεύσεις των θεμελιωδών θεωρημάτων της μαθηματικής ανάλυσης.